

ENSINO MÉDIO

PROBLEMA COM A MATEMÁTICA? SOLUÇÃO...



Capítulo 8: Funções Definidas por Partes

Introdução

Uma função definida por partes é uma combinação de duas ou mais regras, cada uma operando sobre seu próprio domínio. Em geral, estes domínios são contíguos, o que não é um elemento essencial da definição.

Algumas funções definidas por partes possuem nomes especiais, usados da mesma forma como as funções seno ou exponencial, por exemplo. Duas destas funções, em particular, são $|x|$ e $[x]$, sendo a primeira o valor absoluto e a segunda a função maior inteiro. A manipulação geral de funções definidas por partes é, pois, o objetivo deste capítulo.

Índice de Termos

Os seguintes termos, neste capítulo, têm conexão com o Dicionário do Maple; para mais informações vá em [Dicionário Matemático](#).

valor absoluto
inverso aditivo
denominador
domínio
exponencial

função maior inteiro
inequação
intervalo
negativo
não-negativo

positivo
reta real
número real
seno
singularidade

▼ A Função Definida por Partes $|x|$

Como no capítulo anterior, a função valor absoluto, descrita como

$$f([x]) = |x|$$

é sempre uma quantidade não-negativa. Por exemplo, o valor absoluto de -3 é o número positivo 3 .

Considerando-se a mudança de -3 para 3 simplesmente como a "queda do sinal de menos" obscurece a definição desta função.

É melhor compreender a transição de -3 para 3 como sendo obtida pela multiplicação do número negativo -3 por -1 , a fim de formar $+3$, o inverso aditivo de -3 . Portanto, a ação da função valor absoluto deve ser vista como

$$|-3| = 3 = 3$$

ou seja, não como a queda do sinal de menos, mas tornando o número negativo um número positivo pela introdução de um segundo sinal de menos. Vale a pena repetir:

Faça um número negativo positivo negando o número negativo

Se isto for completamente entendido, então a definição abstrata da função valor absoluto, isto é,

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

pode ser mais facilmente compreendida. Se x é conhecidamente um número negativo, este é transformado em positivo acrescentando-se um sinal de menos à sua frente. Se x é zero, seu valor absoluto permanece zero. Se x é positivo, então seu valor absoluto é o próprio, e x permanece inalterado.

A definição abstrata da função valor absoluto é dada apenas como um exemplo de uma função *definida por partes*. Em geral, uma função definida por partes possui mais de uma regra, cada uma aplicada a um conjunto específico de valores no domínio da função.

Uma implementação do Maple da função valor absoluto é dada na Tabela 8.0.1.

<code>convert(x , piecewise)</code>

Tabela 8.0.1 Uma implementação do Maple da função
--

$|x|$ como uma função por partes

Note como o valor em $x = 0$ está incluído no caso de x positivo.

A Tabela 8.0.2 mostra o comando de Maple **piecewise** usado para reproduzir a função valor absoluto.

$\text{piecewise}(x < 0, -x, x)$

Tabela 8.0.2 A função valor absoluto pelo comando do Maple **piecewise**

Note o uso de "caso contrário" para representar o complemento do caso $x < 0$. Portanto, isto representa o caso $x \geq 0$.

▼ A Função Maior Inteiro $[x]$

Se x é um número real, o símbolo $[x]$ tipicamente denota o maior inteiro que é menor ou igual a x . Isto define a função maior inteiro

$[x]$ = o maior inteiro n que satisfaz a condição $n \leq x$

Com efeito, esta é uma função definida por partes com um número infinito de regras. Uma representação da função maior inteiro assemelha-se a:

$$[x] = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ -2 & -2 \leq x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Aqueles que pensarem visualmente e geometricamente poderiam ver $[x]$ como o próprio x mesmo se é um inteiro, e como um inteiro na linha de número que está à esquerda de x se x não é um inteiro.

A função floor é uma implementação do Maple para a função maior inteiro. Alguns valores específicos são listados na Tabela 8.0.3.

$[-2.4] = \text{floor}(-2.4);$
 $[-1.5] = \text{floor}(-1.5);$
 $[-0.7] = \text{floor}(-.7);$
 $[0.8] = \text{floor}(.8);$

```
[1.25] = floor(1.25);
[2.78] = floor(2.78)
```

Tabela 8.0.3 Alguns valores de $[x]$ como dado pelo comando do Maple **floor**

Uma porção do gráfico de $f(x) = [x]$ é mostrado na Figura 8.0.1.

```
plot(floor(x), x = -3 .. 2.99, discontinuity = true, thickness = 3)
```

Figura 8.0.1 Porção do gráfico de $[x] = \text{floor}(x)$

▼ Problemas Típicos

8.1. Traçar o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < -1 \\ 1 & x \leq 1 \\ x^2 & x < 2 \\ 3 - x & \text{caso contrário} \end{cases}$ no intervalo $[-2, 4]$, e obter o valor $f(2)$.

8.2. Comparar as funções $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g(x) = x + 1$, e $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$.

8.3. Traçar o gráfico de $f(x) = x + [x]$ no intervalo $[-3, 3]$.

8.4. Traçar o gráfico de $f(x) = x - [x]$ no intervalo $[-3, 3]$.

8.5. Represente $f(x) = |3x - 5| + 2$ como uma função definida por partes, e obter seu gráfico no intervalo $[-1, 4]$.

8.6. Representar $f(x) = |1 - 2x - 3x^2|$ como uma função definida por partes, e obter seu gráfico no intervalo $[-2, 2]$.

▼ Inicializações do Maple

Antes de acessar a versão do Maple para as soluções do problemas típicos apresentados acima, inicialize o Maple apertando o botão à direita.

Inic...

Soluções

Problema 8.1

8.1 - Solução Matemática

O gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < -1 \\ 1 & x \leq 1 \\ x^2 & x < 2 \\ 3 - x & \text{caso contrário} \end{cases}$$

no intervalo $[-2, 4]$ é mostrado na Figura 8.1.1.

Em $x = 2$, o valor de $f(x)$ é $f(2) = 1$.

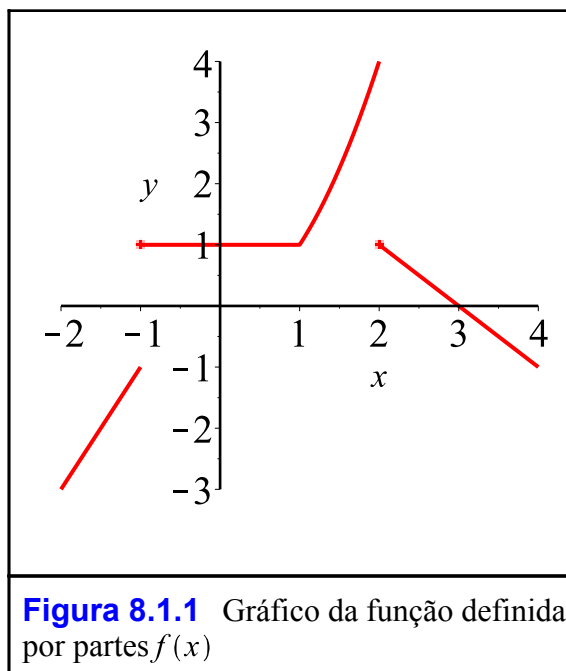


Figura 8.1.1 Gráfico da função definida por partes $f(x)$

8.1 - Solução via Maplet

Um gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < -1 \\ 1 & x \leq 1 \\ x^2 & x < 2 \\ 3 - x & \text{caso contrário} \end{cases}$$

no intervalo $[-2, 4]$ e o valor de $f(2)$ podem ser encontrados com o [Tutorial Funções por Partes](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 8.1.2.

Uma função definida por partes com mais de quatro regras diferentes pode ser inserida regra a regra como

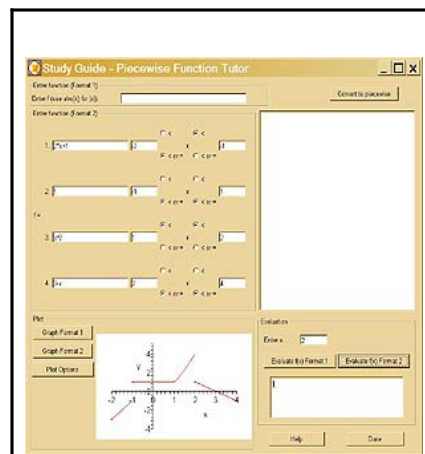


Figura 8.1.2 Imagem do Tutorial Funções por Partes

uma função do tipo Formato 2.

O Formato de **Gráfico 2** é usado para gerar o gráfico desejado. O botão **Opções de Gráfico** deve ser usado para limitar o domínio ao intervalo dado $[-2, 4]$.

O valor $f(2) = 1$ é encontrado inserindo-se $x = 2$ na seção *Avaliação* e clicando-se no botão **Avaliar $f(x)$ no Formato 2**.

Para iniciar o **Tutorial de Funções por Partes**, deve-se clicar sobre o seguinte link: [Tutorial Funções por Partes](#).

▼ 8.1 - Solução Interativa

Insira a função por partes	
Uma função definida por partes pode ser criada interativamente por meio de $\begin{cases} -x & x < a \\ x & x \geq a \end{cases}$, o modelo de expressões por partes na paleta Expressão. Mova através dos campos do modelo usando a tecla Tab. Use Control + Shift + r para gerar colunas adicionais.	
• Complete a equação $f(x) = \dots$ com a função por partes. • Menu de Contexto: Associe Função	
Faça o gráfico $f(x)$	
• Digite $f(x)$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $-2 \leq x \leq 4$ Opções: Encontrar Descontinuidades	
Obter $f(2)$	
• Digite $f(2)$ • Menu de Contexto: Avaliar e Exibir na Linha	

▼ 8.1 - Solução via Comandos do Maple

Se a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < -1 \\ 1 & x \leq 1 \\ x^2 & x < 2 \\ 3 - x & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é inserida no Maple como a expressão

> $f := \text{piecewise}(x < -1, 2x + 1, x \leq 1, 1, x < 2, x^2, 3 - x)$

então $f(2)$ é obtida com

> $\text{eval}(f, x = 2)$

e o gráfico de $f(x)$ é obtido na figura 8.1.2 com

> $\text{plot}(f, x = -2..4, \text{discont} = \text{true})$

Figura 8.1.2 Gráfico da função definida por partes $f(x)$

Se a função dada for inserida como uma função no Maple, então a sintaxe apropriada é

> $F := x \rightarrow \text{piecewise}(x < -1, 2x + 1, x \leq 1, 1, x < 2, x^2, 3 - x)$

Como este modo não exibe a forma "escalonada" da função definida por partes, uma estratégia alternativa pode ser usada.

> $F := x \rightarrow \text{piecewise}(x < -1, 2x + 1, x \leq 1, 1, x < 2, x^2, 3 - x) :$
' $F'(x) = F(x)$

Neste caso, o valor de $f(2)$ é obtido com

> $F(2)$

Problema 8.2

8.2 - Solução Matemática

Comparemos as funções $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g(x) = x + 1$ e $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$.

É tentador escrever

$$f([x]) = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = x + 1 = g([x])$$

Porém esta é uma forma ingênua e incorreta. Embora seja mais trabalhoso, é correto escrever

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \begin{cases} x + 1 & x \neq 1 \\ \text{indefinida} & x = 1 \end{cases}$$

Por convenção, o domínio de uma função é o maior subconjunto dos números reais para o qual sua regra é válida.

A função $f(x)$ não é definida em $x = 1$, enquanto a função $g(x)$ o é, tendo valor igual a 2. Sendo assim, $f(x) \neq g(x)$, ou seja, as funções $f(x)$ e $g(x)$ não são as mesmas. Seus domínios não são iguais. O domínio de $g(x)$ contém um ponto a mais que o domínio de $f(x)$. Neste sentido, $g(x)$ é uma extensão de $f(x)$; isto é, $g(x)$ coincide com $f(x)$ em todos os pontos no domínio comum, mas $g(x)$ é definida em um ponto onde $f(x)$ não é.

A função $h(x)$ coincide em todos os pontos com $g(x)$. Seus domínios são os mesmos, isto é, o conjunto de todos os números reais, e seus valores coincidem em todo número real. Portanto, $h(x) = g(x)$.

8.2 - Solução via Maplet

As três funções

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$g(x) = x + 1$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

podem ser comparadas no [Tutorial Singularidade Removível](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 8.2.1.

O numerador e o denominador da função $f(x)$ são inseridos separadamente e o botão **Conjunto de singularidades** gera o conjunto $A = \{0, 1\}$ contendo as singularidades de $f(x)$.

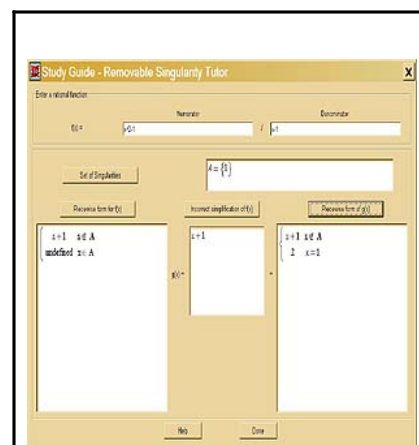


Figura 8.2.2 Imagem do Tutorial Singularidade Removível

O botão **Forma por Partes para $f(x)$** expressa $f(x)$ em sua forma por partes

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ \text{indefinida} & x = 1 \end{cases}$$

O botão **Simplificação Incorreta de $f(x)$** gera a função:

$$g(x) = x + 1$$

Tal função não é equivalente a $f(x)$. Esta função é uma **extensão** de $f(x)$, pois coincide com $f(x)$ em todos os pontos no domínio de $f(x)$, mas seu domínio contém (no mínimo) um ou mais pontos a mais que o domínio de $f(x)$.

O botão **Forma por Partes de $g(x)$** gera a função

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

que é equivalente a $g(x)$. Sendo assim, a singularidade de $f(x)$ em $x = 1$ pode ser removida ao definir-se uma nova função que conceda um valor para $f(1)$. Esta nova função pode ser descrita tanto na forma por partes, como $h(x)$, ou como $g(x)$.

Para iniciar o **Tutorial Singularidade Removível**, deve-se clicar sobre o seguinte link:

[Tutorial Singularidade Removível](#).

▼ 8.2 - Solução Interativa

Digite $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$, a regra para $f(x)$ Menu de Contexto: Simplificar	
O Maple simplifica $f(x)$ para $x + 1$ pois as funções e expressões do Maple não carregam informações do domínio. Infelizmente, isto significa que o Maple stá incorreto quando faz esta simplificação.	
Escreva $\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$, a regra para $h(x)$	

O Maple simplifica $h(x)$ para $x + 1$. Apesar de isto ser uma simplificação correta, o Maple não entende porque esta é a simplificação correta e a simplificação de $f(x)$ não é.

8.2 - Solução via Comandos do Maple

É tentador escrever

$$f([x]) = \frac{(x^2 - 1)}{(x - 1)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = x + 1 = g([x])$$

Contudo, esta é uma forma ingênua e incorreta. Embora seja mais trabalhoso, é correto escrever

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \begin{cases} x + 1 & x \neq 1 \\ \text{indefinida} & x = 1 \end{cases}$$

Na verdade, torna-se difícil para o Maple gerar este gráfico, de forma que a figura 8.2.2 parece ser linear, exceto pelo ponto de descontinuidade ou "buraco" em $x = 1$.

```
> plot( (x^2 - 1)/(x - 1), x = 0 .. 2, sample = [seq( k/50, k = 0 .. 100 )], adaptive
        = false, thickness = 2 )
```

Figura 8.2.2 Gráfico de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Por convenção, o domínio de uma função é o maior subconjunto de números reais para o qual sua regra é válida.

A função $f(x)$ não é definida em $x = 1$, mas a função $g(x)$ o é, e possui valor 2. Sendo assim, $f(x) \neq g(x)$, ou seja, as funções $f(x)$ e $g(x)$ não são as mesmas. Seus domínios não são iguais. O domínio de $g(x)$ contém um ou mais pontos a mais que o domínio de $f(x)$. Neste sentido, $g(x)$ é uma extensão de $f(x)$; isto é, $g(x)$ coincide com $f(x)$ em todos os pontos de domínio comum, mas $g(x)$ é definida em, no mínimo, um ponto onde $f(x)$ não está definida.

A função $h(x)$ coincide em todos os pontos com $g(x)$. Seus domínios são iguais, isto é, o conjunto de todos os números reais, e, ainda, seus valores coincidem em todos os números reais. Portanto, $h(x) = g(x)$.

Problema 8.3

8.3 - Solução Matemática

O gráfico de

$$f(x) = x + [x]$$

no intervalo $[-3, 3]$ aparece na Figura 8.3.1.

Lembre que $[x]$ é a função "maior inteiro" que retorna o maior inteiro que é menor ou igual a x .

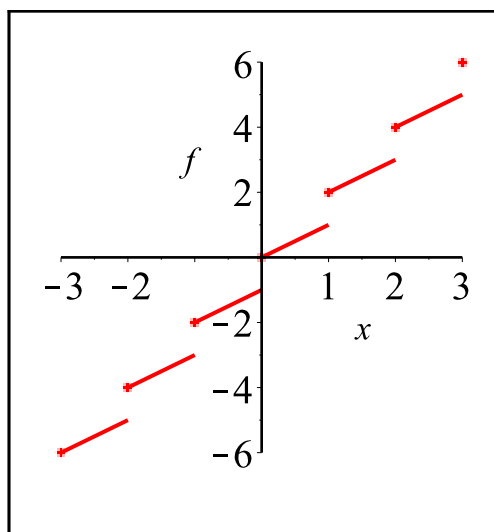


Figura 8.3.1 Gráfico de $f(x) = x + [x]$

8.3 - Solução via Maplet

Dado que $[x]$, a função maior inteiro, é gerada como $\text{floor}(x)$ no Maple, um gráfico da função

$$f(x) = x + [x]$$

no intervalo $[-3, 3]$ pode ser obtida com o [Tutorial Funções por Partes](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 8.3.2.

Insira $f(x) = x + \text{floor}(x)$ como uma função no Formato 1.

Como o domínio de $[x]$ é toda a reta real, expressá-lo como uma função definida por partes requer um número infinito de regras. Portanto, o **Tutorial de Funções por Partes** não descreve esta função na forma "escalonada".

O gráfico desejado é obtido ao clicar-se sobre o botão **Formato de Gráfico 1**.

Para iniciar o **Tutorial de Funções por Partes**, deve-se clicar sobre o seguinte link: [Tutorial Funções por Partes](#).

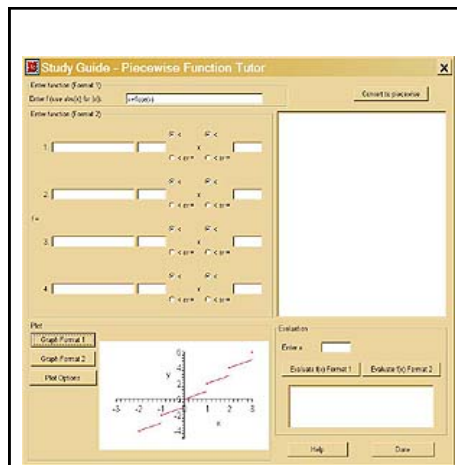


Figura 8.3.2 Imagem do Tutorial Funções por Partes

▼ 8.3 - Solução Interativa

• Escreva $x + \text{Floor}(x)$ • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $-3 \leq x \leq 3$ Opções: Encontrar Descontinuidades	
Alternativamente	
• Digite x • Menu de Contexto: Funções de Valor Inteiro > Floor • Control-arraste $\text{Floor}(x)$ e associe a $+x$ • Pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos	

▼ 8.3 - Solução via Comandos do Maple

O gráfico de $f(x) = x + [x]$, mostrado na figura 10.3.3, é obtido com

```
> plot(x + floor(x), x = -3 .. 3, discontin = true, scaling = constrained)
```

Figura 8.3.3 Gráfico de $f(x) = x + [x]$

▼ Problema 8.4

▼ 8.4 - Solução Matemática

A Figura 8.4.1 contém um gráfico de

$$f(x) = x - [x]$$

desenhado no intervalo $[-3, 3]$.

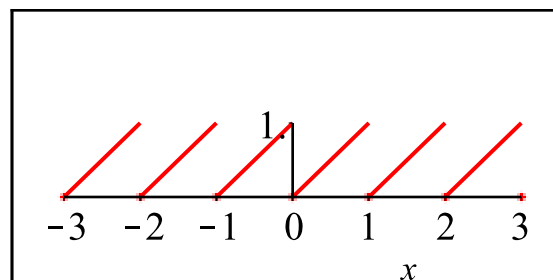


Figura 8.4.1 Gráfico de $f(x) = x - [x]$



▼ 8.4 - Solução via Maplet

Dado que $\lfloor x \rfloor$, a função maior inteiro, é gerada como `floor(x)` no Maple, um gráfico da função

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$$

no intervalo $[-3, 3]$ pode ser obtida com o [Tutorial Funções por Partes](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 8.4.2.

Insira $f(x) = x - \text{floor}(x)$ como uma função no Formato 1.

Como o **domínio** de $\lfloor x \rfloor$ é toda a **reta real**, expressá-lo como uma função definida por partes requer um número infinito de regras. Portanto, o **Tutorial de Funções por Partes** não descreve esta função na forma "escalonada".

O gráfico desejado é obtido ao clicar-se sobre o botão **Formato de Gráfico 1**.

Para iniciar o **Tutorial de Funções por Partes**, deve-se clicar sobre o seguinte link: [Tutorial Funções por Partes](#).

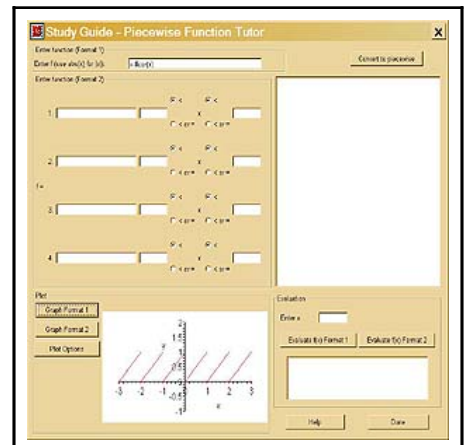


Figura 8.4.2 Imagem do Tutorial Funções por Partes

▼ 8.4 - Solução Interativa

• Escreva $x - \text{Floor}(x)$ • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $-3 \leq x \leq 3$ Opções: Encontrar Descontinuidades	
Alternativamente	
• Digite x • Menu de Contexto: Funções de Valor Inteiro > Floor • Digite $x -$ e Control-arraste $\text{Floor}(x)$ • Pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos	

▼ 8.4 - Solução via Comandos do Maple

O gráfico de $f(x) = x - [x]$, mostrado na figura 8.4.3, é obtido com

```
> plot(x - floor(x), x = -3 .. 3, scont = true, scaling
      = constrained, tickmarks = [7, 2])
```

Figura 8.4.3 Gráfico de $f(x) = x - [x]$

▼ Problema 8.5

▼ 8.5 - Solução Matemática

Converter a função $f(x) = |3x - 5| + 2$, denotada na forma de valor absoluto, para a notação por partes requer o conhecimento de onde $3x - 5$ muda de negativo para positivo. Sendo assim, deve-se resolver a equação

$$3x - 5 = 0$$

para $x = 5/3$. Alternativamente, pode-se resolver as inequações

$$3x - 5 < 0$$

e

$$3x - 5 > 0$$

para

$$x < 5/3$$

e

$$x > 5/3$$

respectivamente.

Portanto, quando $x < \frac{5}{3}$, a expressão $3x - 5$ é negativa, de forma que $f(x)$ torna-se $-(3x - 5) + 2 = 7 - 3x$.

Quando $x > \frac{5}{3}$, a expressão $3x - 5$ é positiva, de forma que $f(x)$ torna-se $(3x - 5) + 2 = 3x - 3$.

Quando $x = \frac{5}{3}$, ambas as expressões reduzem-se ao valor 2 e, portanto, não importa onde a condição de igualdade é incluída na definição por partes.

Desta maneira, a forma por partes de $f(x)$ é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 7 - 3x & x < \frac{5}{3} \\ 3x - 3 & x \geq \frac{5}{3} \end{cases}$$

A Figura 8.5.1 nos dá um gráfico desta função.

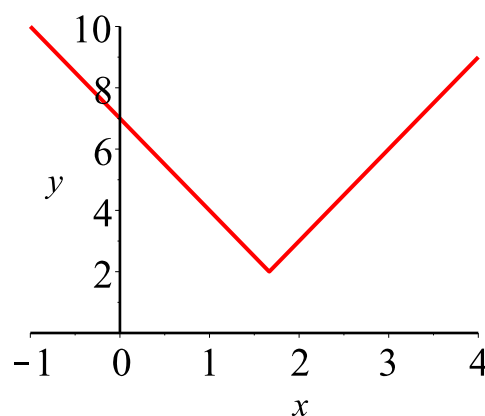


Figura 8.5.1 Gráfico de $f(x) = |3x - 5| + 2$

8.5 - Solução via Maplet

A fim de se representar a função

$$f(x) = |3x - 5| + 2$$

como uma função definida por partes e obter-se seu gráfico no intervalo $[-1, 4]$, deve-se usar o [Tutorial Funções por Partes](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 8.5.2.

Como é sugerido na entrada das funções no Formato 1, deve-se inserir $|3x - 5|$ como $\text{abs}(3*x-5)$.

Em seguida, deve-se clicar em **Converter em função por partes** a fim de obter-se a representação "escalonada" desta função.

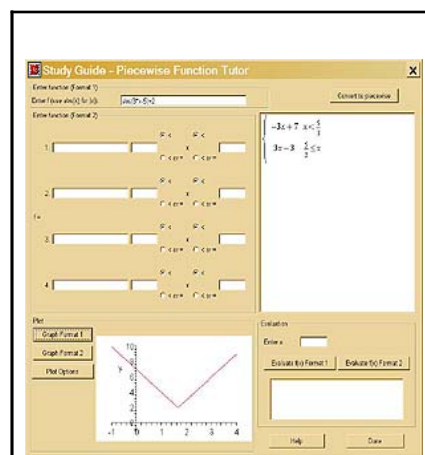


Figura 8.5.2 Imagem do Tutorial Funções por Partes

Ao clicar-se sobre o botão **Gráfico no Formato 1**, obtém-se o gráfico desejado, contanto que o botão **Opções de Gráfico** tenha sido usado para definir o intervalo do gráfico no [domínio](#) requerido.

Para iniciar o **Tutorial de Funções por Partes**, deve-se clicar sobre o seguinte link: [Tutorial Funções por Partes](#).

8.5 - Solução Interativa

• Escreva $3x - 5 + 2$ • Menu de Contexto: Aplique um comando Aplique o comando $\>$ converter Associe os argumentos $\>$ por partes • Menu de Contexto: Gráficos $\>$ Construtor de Gráficos $-1 \leq x \leq 4$ Opções $\>$ $0 \leq y \leq 11$	
Solução obtida de Primeiros Princípios	
• Digite $3x - 5 < 0$ • Menu de Contexto: Resolver	
• Digite $3x - 5 > 0$ • Menu de Contexto: Resolver	
• Digite $-(3x - 5) + 2$ • Menu de Contexto: Resolver e Exibir na Linha	
• Digite $3x - 5 + 2$ • Menu de Contexto: Resolver e Exibir na Linha	
• Use $\begin{cases} -x & x < a \\ x & x \geq a \end{cases}$, o modelo por partes da paleta Expressão para obter $f(x)$ na forma por partes.	

▼ 8.5 - Solução via Comandos do Maple

A função $f(x) = |3x - 5| + 2$, dada no Maple por

> $f := \text{abs}(3x - 5) + 2$

pode ser representada como uma função por partes

> $\text{convert}(f, \text{piecewise})$

O gráfico de $f(x)$ é dado na Figura 8.5.3.

> $\text{plot}(f, x = -1 \dots 4, y = 0 \dots 11)$

Figura 8.5.3 Gráfico de $f(x) = |3x - 5| + 2$

A conversão da notação em valor absoluto para a notação por partes requer o conhecimento de onde $3x - 5$ muda de negativo para positivo. Portanto, deve-se resolver a equação

$$> q := 3x - 5 = 0$$

a fim de obter-se

$$> \text{solve}(q, x)$$

Por outro lado, pode-se, ainda, resolver as inequações

$$> q1 := 3x - 5 < 0;$$

$$q2 := 3x - 5 > 0$$

obtendo-se

$$> \text{solve}(q1, \{x\});$$

$$\text{solve}(q2, \{x\})$$

Portanto, quando $x < \frac{5}{3}$, a expressão $3x - 5$ é negativa, de forma que $f(x)$ torna-se $-(3x - 5) + 2 = 7 - 3x$.

Quando $x > \frac{5}{3}$, a expressão $3x - 5$ é positiva, de forma que $f(x)$ torna-se $(3x - 5) + 2 = 3x - 3$.

Quando $x = \frac{5}{3}$, ambas as expressões reduzem-se a 2 e, portanto, não importa onde a condição de igualdade é incluída na definição por partes.

▼ Problema 8.6

▼ 8.6 - Solução Matemática

Converter a função $f(x) = |1 - 2x - 3x^2|$ da notação em valor absoluto para a notação por partes requer o conhecimento de onde $1 - 2x - 3x^2$ muda de negativo para positivo. Sendo assim, deve-se resolver a equação

$$1 - 2x - 3x^2 = 0$$

pela fórmula quadrática, a fim de obter-se $x = -1$ e $x = 1/3$.

Alternativamente, pode-se resolver as inequações

e

$$1 - 2x - 3x^2 < 0$$

obtendo

$$1 - 2x - 3x^2 > 0$$

e

$$\{x < -1\} \cup \{x > 1/3\}$$

respectivamente.

Portanto, quando $x < -1$, ou quando $x > 1/3$, a expressão $1 - 2x - 3x^2$ é negativa, tal que $f(x)$ se torna

$$-(1 - 2x - 3x^2) = 3x^2 + 2x - 1$$

Quando $-1 < x < 1/3$ a expressão $1 - 2x - 3x^2$ é positiva, tal que $f(x)$ se torna $1 - 2x - 3x^2$.

Quando $x = 1/3$ ou quando $x = -1$, ambas expressões se reduzem a 0, tal que não importa onde a condição de igualdade é incluída na definição da função definida por partes.

Esta função está desenhada na Figura 8.6.1.

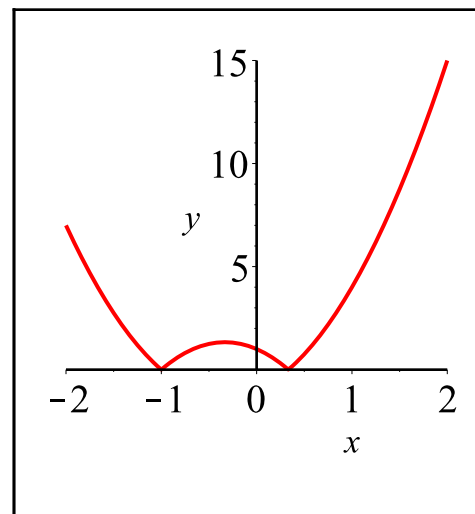


Figura 8.6.1 Gráfico de $f(x) = |1 - 2x - 3x^2|$

8.6 - Solução via Maplet

A fim de representar a função

$$f([x]) = |1 - 2x - 3x^2|$$

como uma função definida por partes e obter seu gráfico no intervalo $[-2, 2]$, deve-se usar o [Tutorial Funções por Partes](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 8.6.2.

Como é sugerido na entrada das funções em Formato 1, deve-se inserir $f(x)$ como

$$\text{abs}(1-2*x-3*x^2).$$

Em seguida, deve-se clicar em **Converter em função por partes** a fim de obter-se a representação

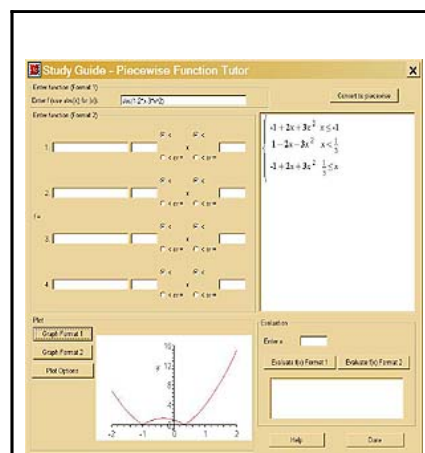


Figura 8.6.2 Imagem do Tutorial Funções por Partes

"escalonada" desta função.

$$f(x) = \begin{cases} -1 + 2x + 3x^2 & x \leq -1 \\ 1 - 2x - 3x^2 & x < 1/3 \\ -1 + 2x + 3x^2 & x \geq 1/3 \end{cases}$$

Ao clicar sobre o botão **Formato de Gráfico 1**, obtém-se o gráfico desejado, contanto que o botão **Opções de Gráfico** tenha sido usado para definir o intervalo do gráfico no domínio requerido.

Para iniciar o **Tutorial de Funções por Partes**, deve-se clicar sobre o seguinte link: [Tutorial Funções por Partes](#).

▼ 8.6 - Solução Interativa

• Digite $1 - 2x - 3x^2$ • Menu de Contexto: Associe Função > g	
• Digite g • Menu de Contexto: Aplique um Comando Aplique o comando > converter Associe os argumentos > por partes • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos $-2 \leq x \leq 2$ Opções > $0 \leq y \leq 15$	
Solução de Primeiros Princípios	
• Digite $g < 0$ • Menu de Contexto: Resolver	
• Digite $g > 0$ • Menu de Contexto: Resolver	
• Use $\begin{cases} -x & x < a \\ x & x \geq a \end{cases}$, o modelo por partes da paleta Expressão para obter $f(x)$ na forma por partes. Adicione "linhas" com Ctrl + Shift + r	

▼ 8.6 - Solução via Comandos do Maple

A função $f(x) = |1 - 2x - 3x^2|$, dada no Maple por

```
> f := abs(1 - 2 x - 3 x^2)
```

pode ser representada como uma função definida por partes

```
> convert(f, piecewise)
```

O gráfico de $f(x)$ é dado na figura 8.6.3.

```
> plot(f, x = -2 .. 2, y = 0 .. 15)
```

Figura 8.6.3 Gráfico de $f(x) = |1 - 2x - 3x^2|$

A conversão da notação em valor absoluto para a notação por partes requer o conhecimento de onde $1 - 2x - 3x^2$ muda de negativo para positivo. Portanto, deve-se resolver a equação

```
> q := 1 - 2 x - 3 x^2 = 0
```

a fim de obter-se

```
> solve(q, x)
```

Por outro lado, pode-se resolver as inequações

```
> q1 := 1 - 2 x - 3 x^2 < 0;  
    q2 := 1 - 2 x - 3 x^2 > 0
```

obtendo

```
> solve(q1, {x});  
    solve(q2, {x})
```

Portanto, quando $x < -1$ ou quando $x > \frac{1}{3}$, a expressão $1 - 2x - 3x^2$ é negativa, de forma que $f(x)$ torna-se $-(1 - 2x - 3x^2) = 3x^2 + 2x - 1$.

Quando $-1 < x < \frac{1}{3}$ a expressão $1 - 2x - 3x^2$ é positiva, de forma que $f(x)$ torna-se $1 - 2x - 3x^2$.

Quando $x = \frac{1}{3}$ ou quando $x = -1$, ambas as expressões reduzem-se a 0 e, portanto, não importa onde a condição de igualdade é incluída na definição por partes.

Exercícios - Capítulo 8

8.1. Para x no intervalo $[-1, 1]$, traçar o gráfico da função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ 1 - x^2 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

8.2. Para x no intervalo $[-\pi, \pi]$, traçar o gráfico da função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -\sin(x) & x < 0 \\ \sin(x) & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

8.3. Para x no intervalo $[-1, 1]$, traçar o gráfico da função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & x < -1 \\ 1 & x < 1 \\ 2 - x & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

8.4. Para x no intervalo $[-3, 3]$, traçar o gráfico da função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)(x+3) & x < -1 \\ 0 & x < 1 \\ (-1+x)(3-x) & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

8.5. Para x no intervalo $[-1, 1]$, traçar o gráfico da função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ e^{-x} & 0 \leq x \end{cases}.$$

8.6. Para x no intervalo $[-2, 2]$, traçar o gráfico da função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -2 - x & x < -1 \\ -1 & x < 0 \\ 1 & x < 1 \\ 2 - x & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

8.7. Para x no intervalo $[-3, 3]$, traçar o gráfico da função definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -3 - x & x < -1 \\ -1 + x & x < 0 \\ 1 + x & x < 1 \\ 3 - x & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Nos exercícios 8.8 - 8.10, comparar as funções $f(x)$, $g(x)$, e $h(x)$.

$$8.8. f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, g(x) = x + 1, h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

$$8.9. f(x) = \frac{3x^2 + 8x - 3}{x + 3}, g(x) = x + 3, h(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + 8x - 3}{x + 3} & x \neq -3 \\ -10 & x = -3 \end{cases}$$

$$8.10. f(x) = \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}, g(x) = \sqrt{x} + 3, h(x) = \begin{cases} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} & x \neq 9 \\ 6 & x = 9 \end{cases}$$

8.11. Traçar o gráfico de $f(x) = 3x + 2[x]$ no intervalo $[-3, 3]$.

8.12. Traçar o gráfico de $f(x) = 3x - 2[x]$ no intervalo $[-3, 3]$.

8.13. Representar $f(x) = 3|1 - 2x| + 4$ como uma função definida por partes e obter seu gráfico no intervalo $[-2, 3]$.

8.14. Representar $f(x) = 1 - 2|3x + 4|$ como uma função definida por partes e traçar seu gráfico no intervalo $[-3, 1]$.

8.15. Representar $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ como uma função definida por partes e traçar seu gráfico no intervalo $[0, 3]$.

8.16. Representar $f(x) = |12 + x - x^2|$ como uma função definida por partes e traçar seu gráfico no intervalo $[-4, 5]$.

